Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X) № 8 (85)

MATHÉMATIQUE

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES ENSEMBLES ABÉLIENS

Par A. MARKOV

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 16. II. 1936)

1. La notion centrale de cette note est celle d'un ensemble abélien des transformations, définie comme il suit.

Soit E un ensemble quelconque, Γ un ensemble des transformations univoques de l'ensemble E en lui-même; c'est-à-dire un ensemble des fonctions φ définies dans E et telles qu'on a $\varphi E \subset E$. Nous disons que Γ est un *ensemble abélien*, si on a:

$$\varphi\psi x = \psi\varphi x$$

pour $x \in E$, $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in \Gamma$.

2. Les résultats principaux de cette note sont obtenus comme conséquences d'un théorème général de A. Tychonoff sur l'existence des points invariants (1).

Dans notre premier théorème il s'agit de transformations continues d'un ensemble B bicompact et convexe d'un espace linéaire topologique. Nous disons qu'une telle transformation φ est *affine* si on a:

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi x + \mu\varphi y$$

pour $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$, $x \in B$, $y \in B$. On a le résultat suivant.

Théorème I. *Soit B un ensemble non vide, convexe et bicompact d'un espace linéaire topologique localement convexe; Γ un ensemble abélien des transformations affines de l'ensemble B en lui-même. Il existe alors un point $x \in B$ tel que l'on a $\varphi x = x$ pour chaque $\varphi \in \Gamma$.*

Esquissons la démonstration. Désignons par I_φ l'ensemble des points invariants de la transformation $\varphi \in \Gamma$. On voit aussitôt que les ensembles I_φ sont convexes et fermés. Je dis que la partie commune d'un nombre fini de ces ensembles est toujours non vide.

Cette affirmation peut être démontrée par induction. Pour un seul ensemble I_φ elle est vrai d'après le théorème de A. Tichonoff. Admettons qu'elle soit vrai pour $n-1$ ensembles I_φ et montrons qu'elle sera alors vrai pour n ensembles I_φ.

Soient en effet $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des éléments quelconques de l'ensemble Γ. L'ensemble $I_{\varphi_1} \cap \cdots \cap I_{\varphi_{n-1}}$ est alors convexe et fermé comme partie commune des ensembles convexes et fermés. Cet ensemble est donc bi-

compact comme partie fermée d'un ensemble bicompact. Il est en outre non vide d'après l'hypothèse inductive.

L' ensemble Γ étant abélien, on a, d'autre part,

$$\varphi_n(I_{\varphi_1} \cap \cdots \cap I_{\varphi_{n-1}}) \subset I_{\varphi_1} \cap \cdots \cap I_{\varphi_{n-1}}.$$

Il s'ensuit d'après le théorème de A. Tychonoff qu'il existe un point de $I_{\varphi_1} \cap \cdots \cap I_{\varphi_{n-1}}$ invariant par rapport à φ_n. Ce point appartient donc à $I_{\varphi_1} \cap \cdots \cap I_{\varphi_n}$ et ce dernier ensemble est non vide.

Notre affirmation sur la partie commune d'un nombre fini des ensembles I_φ est ainsi démontrée. Mais en vertu de la bicompacité de l'ensemble B on déduit aussitôt que la partie commune de tous ces ensembles est aussi non vide, c. q. f. d.

3. En s'appuyant sur ce théorème on peut démontrer le résultat suivant.

Théorème II. *Soit Γ un ensemble abélien des transformations d'un ensemble E en lui-même. Il existe alors une fonctionnelle réelle M, définie dans le domaine des fonctions réelles bornées d'un élément de E, telle qu'on a:*

1°. $M(1) = 1$, *où 1 sous le signe de M désigne une fonction égale identiquement à l'unité;*

2°. $M(f + g) = M(f) + M(g)$;

3°. $M(f) \geqslant 0$, *si $f(x) \geqslant 0$ pour chaque $x \in E$;*

4°. $M(f\varphi) = M(f)$ *pour chaque $\varphi \in \Gamma$.*

Désignons, en effet, par L l'ensemble de toutes les fonctionnelles réelles definies dans le domaine des fonctions réelles bornées d'un élément de E. En considérant cet ensemble comme espace-produit d'une infinité des droites réelles nous y introduisons une topologie déterminée (2). L devient ainsi un espace linéaire topologique localement convexe (2).

En appliquant le théorème de A. Tychonoff sur la bicompacité de l'espace-produit des ségments (3), on montre aisement que les fonctionnelles M satisfaisant aux conditions 1° — 3° forment un ensemble B non vide, convexe et bicompact. À chaque transformation $\varphi \in \Gamma$ correspond une transformation φ^* de cet ensemble en lui-même, définie par l'égalité:

$$(\varphi^* M)(f) = M(f\varphi).$$

On voit que ces transformations φ^* sont affines et qu'ils forment un ensemble abélien. Il s'ensuit, d'après le théorème I, qu'il existe une fonctionnelle $M \in B$ telle qu'on a $\varphi^* M = M$ pour chaque $\varphi \in \Gamma$. Cette fonctionnelle satisfait aux conditions 1° — 4°, c. q. f. d.

4. Considérons maintenant un cas particulier quand E est un espace topologique normal (4) et les éléments de Γ sont des transformations continues de cet espace en lui-même. En employant une construction de Neumann (5), on peut alors passer de la *valeur moyenne* M à une *densité moyenne*. Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

Théorème III. *Soit Γ un ensemble abélien des transformations continues d'un espace topologique normal E en lui-même. Il existe alors une fonction réelle μ d'un sous-ensemble arbitraire de E, telle qu'on a:*

1°. $\mu E = 1$;

2°. $\mu(A \cup B) \leqslant \mu A + \mu B$;

3°. $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$, *si $\overline{A} \cap B$ est vide;*

4°. $\mu A = \inf \mu G$ *pour G parcourant la classe des voisinages de l'ensemble A;*

5°. $\mu\varphi^{-1} G \geqslant \mu G$ *pour chaque ensemble ouvert G et chaque $\varphi \in \Gamma$.*

5. A ce théorème se rattachent les faits suivants, qu'on démontre aisement.

Remarque 1. *Si l'espace normale E est compact, alors chaque fonction d'ensemble μ satisfaisant aux conditions* 1°—4°, *satisfait aussi à la condition*:

$$2^{\circ\prime}.\ \mu \mathfrak{S}_{i=1}^{\infty} A_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i.$$

Donc dans ce cas la fonction μ du théorème III jouit de toutes les propriétés essentielles de la mesure extérieure. Il est intéressant à remarquer que la condition plus forte de la bicompacité de l'espace E serait ici superflue.

Remarque 2. *Si les éléments d'ensemble Γ sont des transformations fermées* (4), *alors chaque fonction μ, satisfaisant aux conditions 1°—5°, satisfait aussi à la condition:*

$$5^{\circ\prime}.\ \mu\varphi^{-1}A = \mu A \text{ pour chaque } A \subset E \text{ et chaque } \varphi \in \Gamma.$$

Cela a lieu, en particulier, quand tous les $\varphi \in \Gamma$ sont des transformations topologiques de l'espace E en lui-même. Dans ce cas la fonction μ du théorème III est donc invariante par rapport au Γ au sens ordinaire, c'est-à-dire, on a $\mu\varphi A = \mu A$ pour $A \subset E$ et $\varphi \in \Gamma$.

Il s'ensuit de ces remarques que notre théorème III contient comme cas particulier un résultat intéressant de N. Bogoliouboff et N. Kryloff, notamment l'existence d'une mesure invariante par rapport à un groupe continu monoparamétrique des transformations topologiques d'un espace métrique compact en lui-même (7).

Institut de Mathématiques
et de Mécanique de l'Université
de Léningrad.

Manuscrit reçu
le 16. II. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] A. Tychonoff, Math. Ann., **111**, 767—776 (1935). [2] Loc. cit., p. 772. [3] A. Tychonoff, Math. Ann., **102**, 544 (1929). [4] P. Alexandroff et H. Hopf, Topologie, **1**, 68, 95 (1935). [5] J. v. Neumann, Compositio Math., **1**, 106—114 (1934). [6] Compte rendu à la I Réunion topologique internationale (Moscou, Sep. 1935). Voir aussi les notes de N. Bogoliouboff et N. Kryloff: Sur quelques théorèmes de la théorie générale de la mesure, CR., **201**, 1002—1003 (1935); Les mesures invariantes et la transitivité, CR., **201**, 1454—1456 (1935). Le même résultat était obtenu indépendamment par A. Weil (compte rendu à la même Réunion).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

MATHÉMATIQUES

SUR LES DÉVELOPPEMENTS BILINEAIRES DES NOYAUX SYMÉTRIQUES, POSITIFS AU SENS DE MERCER

Par A. DANILEVSKIJ et M. KREIN

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 25. I. 1936)

Soit $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ un système complet ortho-normal de fonctions fondamentales d'un noyau $k(x, s)$ $[a \leqslant x, s \leqslant b]$ continu et symétrique. Si $k(x, s)$ est un noyau positif, c'est-à-dire les valeurs caractéristiques λ_i correspondant aux fonctions fondamentales $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes positives, on a d'après le théorème de Mercer (1), le développement suivant:

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i}, \tag{1}$$

la série convergeant uniformément et absolument dans le carré $(a \leqslant x, \ s \leqslant b)$.

En se servant de ce développement montrons que

Si le noyau $k(x, s)$ symétrique, continu et positif admet le développement:

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)\,\psi_i(s) \qquad (a \leqslant x, \ s \leqslant b), \tag{2}$$

les fonctions $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont continues et de plus elles sont développables en des séries absolument et uniformément convergentes de fonctions fondamentales:

$$\psi_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{3}$$

où la matrice $\| a_{ik} \|_1^{\infty}$ est orthogonale par les colonnes, c'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}\,a_{il} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{4}$$

Réciproquement, toute matrice $\| a_{ik} \|_1^{\infty}$ orthogonale par les colonnes définit d'après les formules (3) un système de fonctions continues $\psi(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ fournissant le développement (2).

En effet, il suit du développement (2), que

$$k(x+h, x+h) - 2k(x+h, x) + k(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} [\psi_i(x+h) - \psi_i(x)]^2.$$

Mais pour $h \to 0$ la première partie de l'égalité tend vers zéro; d'où toutes les fonctions $\psi_i(x)$ sont continues. Cela étant, il est aisé de montrer au moyen des considérations, qu'on emploie d'ordinaire pour démontrer le théorème cité de Mercer, que les développements (2) convergent absolument et uniformément dans le carré $(a \leqslant x, s \leqslant b)$.

Posons maintenant

$$\int_a^b \psi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \frac{a_{ik}}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

En intégrant les deux parties de l'égalité (2) multipliée par $\varphi_k(x)$ et $\varphi_l(s)$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$ par rapport à x et s entre les limites a et b, on trouve que la matrice $\| a_{ik} \|_1^{\infty}$ jouit de la propriété (4). Mais comme on sait, il suit de (4) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty)\ (^2).$$

Cette inégalité avec l'inégalité de Schwarz et le développement (1) pour $s = x$ entraîne la convergence uniforme de la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Par conséquent, la fonction

$$r_i(x) = \psi_i(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

est continue. D'autre part, comme la fonction $r_i(x)$ est orthogonale à toutes les fonctions $\varphi_\nu(x)$, on a:

$$\int_a^b \int_a^b k(x, s)\, r_i(x)\, r_i(s)\, dx\, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left[\int_a^b r_i(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx\right]^2}{\lambda_\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\int_a^b r_i(x)\,\psi_\mu(x)\,dx\right]^2 = 0,$$

d'où

$$\int_a^b r_i(x)\,\psi_i(x)\,dx = \int_a^b r_i(x)\left[\psi_i(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right] dx = \int_a^b r_i^2(x)\,dx = 0$$

Donc la partie directe du théorème est démontrée. Pour démontrer la partie inverse il suffit de remarquer, après tout ce qu'on a dit, que la matrice $\| a_{ik} \|_1^{\infty}$ étant orthogonale par les colonnes, on a pour tous ξ_i et ξ_i' $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ tels que $\sum \xi_i^2 < \infty$, $\sum \xi_i'^2 < \infty$ l'égalité suivante:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k'\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\,\xi_i'\ (^3). \qquad (5)$$

D'après un des théorèmes de M. G. Krein (4), dont la démonstration a été considérablement simplifié par A. M. Danilevsky (5), on peut affirmer que si le noyau $k(x, s)$ a les dérivées continues

$$k_{pq}(x, s) \equiv \frac{\partial^{p+q} K(x, s)}{\partial x^p \partial s^q} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

on a pour ces dérivées les développements:

$$k_{pq}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(p)}(x)\, \varphi_i^{(q)}(s)}{\lambda_i} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Ces développements, obtenus en différentiant terme à terme les développements (1), convergent absolument et uniformément dans le carré $(a > x, s < b)$.

Cette proposition jointe à celle qui précède, permet d'établir un théorème, qui semble être paradoxale au premier coup d'œil:

Si le noyau $k(x, s)$ $(a \leqslant x, s \leqslant b)$ *a les dérivées continues* $k_{pq}(x, s)$ $(p, q = 0, 1, 2, \ldots, n)$ *et s'il admet le développement:*

$$k(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)\, \psi_i(s), \tag{7}$$

les fonctions $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *ont n dérivées continues, et*

$$k_{pq}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(p)}(x)\, \psi_i^{(q)}(s) \qquad (p, q = 0, 1, 2, \ldots, n); \tag{8}$$

tous ces développement convergent absolument et uniformément dans le carré $(a < x, s < b)$.

En effet, en vertu de l'égalité:

$$k_{pp}(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\varphi_i^{(p)}(x)]^2}{\lambda_i} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \frac{\varphi_k^{(p)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty;\ p = 1, 2, \ldots, n)$$

convergent absolument et uniformément, car

$$\sum_{k=\mu}^{\nu} \left| a_{ik} \frac{\varphi_k^{(p)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=\mu}^{\nu} a_{ik}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=\mu}^{\nu} \frac{[\varphi_k^{(p)}(x)]^2}{\lambda_k}} \leqslant \sqrt{\sum_{k=\mu}^{\nu} a_{ik}^2} \cdot \sqrt{k_{pp}(x, x)}$$

D'où il suit, que chaque fonction $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a les dérivées continues $\psi_i^{(p)}(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ et

$$\psi_i^{(p)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \frac{\varphi_k^{(p)}(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \infty).$$

En vertu de l'identité (5) et des relations (6), ces égalités entraînent les développements (8). Cela posé on démontre sans peine en s'appuyant sur le théorème de Dini que tout ces développements convergent absolument et uniformément dans le carré $(a < x, s < b)$. Le théorème est donc démontré.

Il est aisé de voir, que si un des produits $\psi_i(x)\,\psi_i(s)$ au moins entre dans la série (7) non pas avec le signe plus (+) mais avec le signe moin (—), on ne pourrait plus affirmer l'existence des dérivées pour les fonctions $\psi_i(x)$!

En terminant notre note signalons encore le fait suivant:

Si le noyau $k(x, s)$ $(a \leqslant x,\ s \leqslant b)$ est une fonction analytique de deux arguments x et s et s'il admet la représentation (7), les fonctions $\psi_i(x)$, qui figurent dans ce développement, sont des fonctions analytiques dans l'intervalle (a, b).

Cette affirmation peut être obtenue aisément de l'inégalité:

$$\left|\psi_i^{(p)}(x)\right| \leqslant \sqrt{k_{pp}(x, x)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

qui découle de (8), si l'on y pose $p = q$ et $s = x$.

Institut de Mathématiques et de Mécanique
de l'Université de Kharkoff

Manuscrit reçu
le 25. I. 1936

LITTÉRATURE CITÉE

[1] E. Goursat, Cours d'Analyse, t. III, p. 454—456. [2] G. Kowalewsky, Determinantentheorie, § 166. [3] G. Kowalewsky, Ibidem. [4] M. Krein, C. R. de l'Acad. des Sci., Paris, t. 200 (1935), pp. 797—799. [5] A. Danilevsky, C. R. Acad. Sci. URSS, I, 9 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

MATHÉMATIQUES

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE L'EXPRESSION EN FORME FINIE DES FONCTIONS MODULAIRES AU MOYEN DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

Par D. MORDUCHAJ-BOLTOVSKOJ (MORDOUKHAY-BOLTOVSKOY)

(Présenté par N. N. Lusin, de l'Académie, le 19. II. 1936)

§ 1. Liouville (1) a démontré (1840) que les périodes de l'intégrale elliptique $4K$, $2K'i$ sont des fonctions transcendantes du module k. Mais il faut y ajouter qu'elles ne sont pas exprimables en forme finie au moyen de transcendantes élémentaires. On tire cette conclusion de l'existence de la solution fondamentale du type (2):

$$y = e^{\int \xi dx} \neq \text{const}, \tag{1}$$

où ξ est algébrique pour chaque équation différentielle linéaire algébrique du second ordre:

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \tag{2}$$

quand cette équation est résoluble en forme finie au moyen de fonctions élémentaires transcendantes (auxquelles on peut joindre des intégrales abéliennes) ou au moyen de quadratures.

Dans le cas de l'exprimabilité au moyen de fonctions élémentaires on a:

$$y = e^{\omega}[\gamma_0]^{\lambda_0}(\gamma_1)^{\lambda_1}\ldots(\gamma_n)^{\lambda_n},$$

où ω et les γ_i sont des fonctions algébriques, λ_0 un nombre rationnel et les λ_i des nombres irrationnels.

Pour la solution générale de l'équation différentielle (3):

$$y'' + \frac{1-3x^2}{x(1-x^2)}y' - \frac{y}{1-x^2} = 0, \tag{3}$$

nous avons:

$$y = C_1 K + C_2 K' = C_1 \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2\xi^2)}} + C_2 \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2\xi^2)}}.$$

L'équation (3) est fuchsienne.

Remarquons qu'en plus de la solution

$$y = (x - x_0)^{\frac{\nu}{s}} \sum_{j=0}^{j=\infty} a_j (x - x_0)^{\frac{j}{s}}$$

l'équation (3) a aussi des solutions de la forme

$$Y_\mu = (x - x_0)^{\frac{\mu}{s}} \sum_{j=0}^{j=\infty} b_j (x - x_0)^j ,$$

et ensuite, que l'équation charactéristique de l'équation (3) n'a que des racines positives. ξ doit être rationnele et y n'ayant pas de pôles se réduit à une constante.

§ 2. On peut généraliser ce résultat; y ne peut pas satisfaire à l'équation $\Omega(x, y) = 0$, dont la partie gauche s'exprime en forme finie au moyen de transcendantes élémentaires. Il faut mettre à profit mes recherches (4) et celles de M. Ritt (5), portant sur les conditions de la réductibilité du problème de l'intégration en quadratures au problème plus simple de la résolution en forme finie.

Pour démontrer que l'équation (3) dans le cas d'intégrabilité en forme finie a une solution y qui s'exprime en forme finie au moyen de quadratures, il faut

a) Établir en suivant la méthode de Liouville la formule générale de l'équation différentielle algébrique du premier ordre:

$$f(x, y, y') = 0, \tag{4}$$

exprimable en forme finie:

$$\Phi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \lambda_k \log \Phi_k(x, y) = C\ (^6), \tag{5}$$

où Φ_0, et les Φ_k sons algébriques;

b) Déduire par la même méthode la forme du multiplicateur d'Euler pour l'équation:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{4'}$$

M et N étant des polynômes en y d'ordre m et n:

$$\mu = e^{H_0(x, y)} [H_1(x, y)]^{\lambda_1} [H_2(x, y)]^{\lambda_2} \ldots [H_m(x, y)]^{\lambda_m} =$$

$$= e^{H_0(x, y)} h(x) \prod_{i=1}^{i=m} (y - y_j)^{hj} , \tag{6}$$

où en vertu du théorème connu de Minding (7), les y_j sont des solutions particulières algébriques de l'équation (4') [et aussi les pôles de $H_0(x, y)$];

c) Montrer que s'il n'y a aucune solution algébrique, l'on a:

$$H_j(x, y) = H_j(x),\ H_0(x, y) = \text{un polynôme en } y$$

et

$$n \geqslant m - 1. \tag{7}$$

L'équation:

$$p_0\, d\xi + (p_0 \xi^2 + p_1 \xi + p_2)\, dx = 0, \tag{8}$$

à laquelle se ramène l'équation (2) par la substitution (1), ne satisfait pas à la condition (7). Par conséquent, l'équation (2) n'a aucune solution de la forme (1).

§ 3. Il faut remarquer qu'il n'y a guère lieu de conclure de là que $k = \omega\left(\frac{K'}{K}\right)$ ne s'exprime pas en forme finie. Nous obtenons pour k une équation différentielle qui n'est plus linéaire. L'inexprimabilité en forme finie dérive de ce qu'en vertu des recherches de Ritt [9] les fonctions qui s'expriment au moyen de fonctions élémentaires (qu'on peut remplacer par des quadratures) ne peuvent avoir aucune ligne singulière, tandis que la fonction modulaire a l'axe OY pour sa coupure naturelle.

Pour démontrer que $\frac{K'}{K}$ ne s'exprime pas en forme finie au moyen de k, on peut procéder de la manière suivante.

Dans le développement bien connu:

$$f(q) = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \tag{9}$$

nous voyons que $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^2 - n^2] = \infty$, c'est-à-dire que nous avons des exposants lacunaires et derechef pour $f(q)$ le cercle de convergence doit être la coupure naturelle [en vertu du théorème de Fabry [10]]. Si $\frac{K'}{K}$ et par suite $q = \varphi(k)$ s'exprime en forme finie par k, alors $f[\varphi(k)]$ aura les points singuliers là où l'une des fonctions f ou φ sera holomorphe, tandis que l'autre y présentera un point singulier. Si q_0 sont des points singuliers de $f(q)$ (donnant un ensemble continu), on obtiendra les points singuliers de $f[\varphi(k)]$ en excluant de l'ensemble continu des racines de l'équation $\varphi(k) = q_0$ les points singuliers (ne formant pas d'ensemble continu) et on aura pour la fonction qui s'exprime en forme finie un ensemble continu de points singuliers, ce qui est impossible.

Manuscrit reçu
le 19. II. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Liouville, C. R. (1840); Laurent, Traité d'analyse, IV, 303 (1889). [2] Vessiot, Ann. de l'École Normale (1891); E. Picard, Traité d'Analyse, t. III, ch. XVII; Д. Мордухай-Болтовской, Изв. Варшавского Ун-та (1910, 1911). [3] Laurent, Traité d'analyse, IV, 300. [4] Д. Мордухай-Болтовской, Изв. Варшавск. Ун-та (1914). [5] I. Ritt, Bull. of the Amer. Math. Soc., January-February (1927). [6] Д. Мордухай-Болтовской, Сообщ. Харьковск. мат. о-ва (1907). [7] Миндинг, Исследов. об интегрировании дифференц. уравнений первого порядка с двумя переменными (1862), Mém. de l'Acad. des Sci. de St. Pétersbourg, VII série, t. V, № 1 (1869). [8] Коркин, Мат. сборн., 24(2) (1904). [9] I. Ritt, Transact. of the Math. Soc., 27, 68 (1927). [10] Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II. VII Abt., § 5, 303 (1931); Fabry, Ann. de l'École Normale (1896).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

MATHEMATISCHE PHYSIK

DIE BROWNSCHE BEWEGUNG EINES LINEAREN GITTERS

Von I. BESSONOV

(Vorgelegt von A. N. Krylov, Mitglied der Akademie, d. 21. I. 1936)

In einer Reihe von Arbeiten (1) hat G. Krutkov eine Methode zur Lösung linearer Aufgaben der Theorie der Brownschen Bewegung entwickelt und für den Fall des Vibrators (2) die Rechnungen ausgeführt. Hier wird diese Methode auf das Problem der Brownschen Bewegung eines «linearen Gitters» angewandt. Wir verstehen darunter ein mechaniches System, welches aus n Massenpunkten von der gleichen Masse m besteht, die in gleichen Abständen auf einem masselosen elastischen Faden aufgereiht sind.

1. Der nullte und der $(n+1)$-te Punkte des Gitters sollen eingespannt sein. Betrachten wir lediglich kleine Abweichungen y_r von den stabilen Gleichgewichtslagen, so haben wir für kinetische Energie, Zerstreuungsfunktion und potentielle Energie die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\sum_{r=1}^{n}\dot{y}_r^2, \quad F = \frac{\varkappa}{2}\sum_{r=1}^{n}\dot{y}_r^2, \\ \Phi &= \frac{2k^2}{2}(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2 - \cdots + y_n^2). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die orthogonale Transformation:

$$y_r = \sum_{s=1}^{n} b_{rs}x_s = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sum_{s=1}^{n}\sin\frac{rs\pi}{n+1}\cdot x_s, \tag{2}$$

führt Φ in eine Summe von Quadraten:

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\lambda_s x_s^2, \tag{3}$$

über, mit

$$\lambda_s = 2k^2\left(1 - \cos\frac{s\pi}{n+1}\right). \tag{4}$$

Bei Abwesenheit von äusseren Kräften nehmen die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems in den Normalkoordinaten x_s die Form:

$$\ddot{x}_s + 2h\dot{x}_s + \omega_s^2 x_s = 0, \tag{5}$$

an, mit

$$2h = \frac{\varkappa}{m}, \quad \omega_s^2 = \frac{\lambda_s}{m}.$$

2. Sind Lage und Geschwindigkeit des Systems zur Anfangszeit $t = 0$ gegeben, so hat man für die Wahrscheinlichkeitsdichten der Geschwindigkeit und der Verschiebung (B. 22, 34, 39, 40, 48, 49) die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} f_{1s}(\varphi_s', t, \varphi_{0s}', x_{0s}) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathfrak{A}_s}} e^{-\frac{\mathfrak{D}_s^2}{4\mathfrak{A}_s}}, \\ f_{2s}(x_s, t, \varphi_{0s}', x_{0s}) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathfrak{B}_s}} e^{-\frac{\mathfrak{E}_s}{4\mathfrak{B}_s}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\varphi_{0s}' = \dot{x}_s\Big|_{t=0}, \quad x_{0s} = x_s\Big|_{t=0},$$

mit

$$\mathfrak{A}_s = \frac{h}{8a\alpha_s^2}\Big[(h+\alpha_s)(1-e^{-2(h+\alpha_s)t}) + (h-\alpha_s)(1-e^{-2(h-\alpha_s)t}) - 2\frac{(h^2-\alpha_s^2)}{h}(1-e^{-2ht})\Big], \tag{7}$$

$$\mathfrak{B}_s = \frac{h}{8a\alpha_s^2}\left[\frac{1-e^{-2(h+\alpha_s)t}}{h+\alpha_s} + \frac{1-e^{-2(h-\alpha_s)t}}{h-\alpha_s} - 2\frac{(1-e^{-2ht})}{h}\right], \tag{8}$$

$$\mathfrak{D}_s = \varphi_s' - \mathring{\varphi}_s' = \varphi_s' - \frac{h+\alpha_s}{2\alpha_s} e^{-(h+\alpha_s)t}[\varphi_{0s}' + (h-\alpha_s)x_{0s}] + \frac{h-\alpha_s}{2\alpha_s} e^{-(h-\alpha_s)t}[\varphi_{0s}' + (h+\alpha_s)x_{0s}], \tag{9}$$

$$\mathfrak{E}_s = x_s - \mathring{x}_s = x_s + \frac{e^{-(h+\alpha_s)t}}{2\alpha_s}[\varphi_{0s}' + (h-\alpha_s)x_{0s}] - \frac{e^{-(h-\alpha_s)t}}{2\alpha_s}[\varphi_{0s}' + (h+\alpha_s)x_{0s}], \tag{10}$$

$\alpha_s = \sqrt{h^2 - \omega_s^2}$, $a = \frac{Nm}{2RT}$ = die Konstante der Brownschen Bewegung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle x_s in die entsprechenden Intervalle $(x_s, x_s + dx_s)$ zu liegen kommen, ist, wegen ihrer Unabhängigkeit von einander, gleich

$$\prod_{s=1}^{n} f_{2s}\, dx_s = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{1}{\mathfrak{B}_s}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\sum_{s=1}^{n} \frac{\mathfrak{E}_s^2}{4\mathfrak{B}_s}\right](dx_s). \tag{11}$$

Um die Wahrscheinlichkeit, dass y_r in das Intervall $(y_r, y_r + dy_r)$ fällt, zu finden, muss man (11) über das Gebiet

$$y_r \leqslant \sum_{s=1}^{n} b_{rs} x_s \leqslant y_r + dy_r, \tag{12}$$

integrieren. Setzt man

$$X_s = \frac{1}{\sqrt{4\mathfrak{B}_s}} \mathfrak{E}_s,$$

so hat man

$$f_2\, dy_r = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int \cdots \int \exp\left[-\sum_{s=1}^{n} X_s^2\right](dX_s),$$

mit dem Integrationsgebiet

$$Y_r = y_r - \sum_{s=1}^{n} b_{rs} \overset{\circ}{x}_s \leqslant 2 \sum_{s=1}^{n} b_{rs} \mathfrak{B}_s^{\frac{1}{2}} X_s \leqslant Y_r + dY_r. \tag{13}$$

Durch eine orthogonale Transformation kann eine der Koordinaten senkrecht zu den Hyperflächen (13), welche das Integrationsgebiet begrenzen, gerichtet werden. Bezeichnet man diese Koordinate mit H, so hat man:

$$\sum_{s=1}^{n} X_s^2 = H^2 + \sum_{s=2}^{n} \xi_s^2.$$

Das Integrieren nach ξ_s muss zwischen den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ ausgeführt werden, das Gebiet nach H ist durch die Ungleichungen

$$Y_r \leqslant |\nabla Y_r| H \leqslant Y_r + dY_r,$$

bestimmt, wo

$$|\nabla Y_r| = |\operatorname{grad} Y_r| = 2 \sqrt{\sum_s b_{rs}^2 \mathfrak{B}_s}$$

ist.

Nach Ausführung der Integration erhält man:

$$f_2(y_r, t, \varphi'_{0s}, x_{0s}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \sum_s b_{rs}^2 \mathfrak{B}_s}} \exp\left[- \frac{\left(y_r - \sum_s b_{rs} \overset{\circ}{x}_s \right)^2}{4 \sum_s b_{rs}^2 \mathfrak{B}_s} \right]. \tag{14}$$

Analoge Betrachtungen für die Geschwindigkeiten $\varphi_r = \dot{y}_r$ ergeben

$$f_1(\varphi_r, t, \varphi'_{0s}, x_{0s}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \sum_s b_{rs}^2 \mathfrak{A}_s}} \exp\left[- \frac{\left(\varphi_r - \sum_s b_{rs} \overset{\circ}{\varphi}'_s \right)^2}{4 \sum_s b_{rs}^2 \mathfrak{A}_s} \right]. \tag{15}$$

In diesen Formeln treten die $\varphi'_{0s} = \dot{x}_s|_{t=0}$ und $x_{0s} = x_s|_{t=0}$ auf, die nicht direkt gegeben sind, da die Anfangswerte in dem «mechanischen Problem» die Grössen

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_r|_{t=0} = \varphi_{0r} &= \sum_{s=1}^{n} b_{rs} \varphi'_{0s}, \\ y_r|_{t=0} = y_{0r} &= \sum_{s=1}^{n} b_{rs} x_{0s} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

bestimmen. Um φ'_{0s} und x'_{0s} zu gewinnen, muss man das System (16) lösen, was wegen $|b_{rs}| \neq 0$ immer möglich ist. Im Spezialfall, $\varphi_{0r} = y_{0r} = 0$, hat man $x'_{0s} = \varphi'_{0s} = 0$.

3. Für $t \to \infty$ hat man:

$$\mathfrak{A}_s = \frac{1}{4a}, \quad \mathfrak{B}_s = \frac{1}{4a\omega_s^2}, \quad \overset{\circ}{x}_{0s} = \overset{\circ}{\varphi}'_s = 0, \tag{17}$$

und die Formeln (14), (15) geben uns die stationären Ausdrücke:

$$f_1(\varphi_r) d\varphi_r = \sqrt{\frac{a}{\pi \sum_s b_{rs}}}\, e^{-\frac{a\varphi_r^2}{\sum_s b_{rs}^2}} d\varphi_r; \tag{18}$$

$$f_2(y_r)dy_r = \sqrt{\frac{a}{\pi \sum_s \frac{b_{rs}^2}{\omega_s^2}}}\, e^{-\sum_s \frac{ay_r^2}{\frac{b_{rs}^2}{\omega_s^2}}} dy_r. \qquad (19)$$

Da $\sum_{s=1}^{n} b_{rs}^2 = 1$ ist, so ergibt sich aus (18) das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeiten. Man erhält leicht:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{b_{rs}^2}{\omega_s^2} = \frac{mr(n+1-r)}{k^2(n+1)}, \qquad (20)$$

und Formel (19) gibt uns die Boltzmannsche Verteilung:

$$f_2(y_r)\,dy_r = \sqrt{\frac{ak^2(n+1)}{\pi mr(n+1-r)}} \exp\left[-\frac{ak^2(n+1)}{mr(n+1-r)} y_r^2\right] dy_r. \qquad (19_1)$$

4. Ist der nullte Punkt des Gitters eingespannt und der n-te frei, so hat man für die potentielle Energie die quadratische Form:

$$\Phi = \frac{k^2}{2}\left(2y_1^2 - 2y_1y_2 + \cdots - 2y_{n-1}y_n + y_n^2\right). \qquad (21)$$

Die orthogonale Transformation, die Φ in eine Summe von Quadraten verwandelt, ist:

$$y_r = \sum_{s=1}^{n} b_{rs}x_s = \sqrt{\frac{4}{2n+1}} \sum_{s=1}^{n} \sin\frac{r(2s-1)\pi}{2n+1} \cdot x_s; \qquad (22)$$

für λ_s hat man:

$$\lambda_s = 2k^2\left(1 - \cos\frac{(2s-1)\pi}{2n+1}\right). \qquad (23)$$

Im Grenzfall $t \to \infty$ hat man für die Geschwindigkeiten wieder die Maxwellsche Verteilung:

$$f_1(v)dv = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-av^2} dv,$$

für die Verschiebungen erhält man:

$$\sum_{s=2}^{n} \frac{b_{rs}^2}{\omega_s^2} = \frac{mr}{k^2}$$

und

$$f_2(y_r)dy_r = \sqrt{\frac{ak^2}{\pi mr}}\, e^{-\frac{ak^2}{mr} y_r^2} dy_r. \qquad (24)$$

5. Sind der n-te und der erste Punkte des Gitters frei, so hat die potentielle Energie die Gestalt:

$$\Phi = \frac{k^2}{2}(y_1^2 - 2y_1y_2 + 2y_2^2 - \ldots - 2y_{n-1}y_n + y_n^2). \qquad (25)$$

Die orthogonale Transformation:

$$y_r = \sum_{s=0}^{n-1} b_{rs}x_s = \sqrt{\frac{1}{n}}\, x_0 + \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{s=1}^{n-1} \cos(2r-1)\frac{s\pi}{2n} \cdot x_s, \qquad (26)$$

fürt Φ in eine Summe von Quadraten über. Man hat dementsprechend

$$\lambda_s = 2k^2\left(1 - \cos\frac{s\pi}{n}\right), \quad \omega_s^2 = \frac{\lambda_s}{m}. \tag{27}$$

Für $s = 0$ hat man $\omega_s = 0$, $\alpha_0 = h$ und die Formeln (7) — (10) sind mit denjenigen für ein «freies Teilchen» identisch (B. 55):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_0 &= \frac{1}{4a}(1 - e^{-4ht}), \\ \mathfrak{B}_0 &= \frac{1}{8ah}\left[\frac{1 - e^{-4ht}}{2h} + 2t - \frac{2(1 - e^{-2ht})}{h}\right], \\ \mathfrak{D}_0 &= \varrho_0' - \varrho_{00}' e^{-2ht}, \\ \mathfrak{E}_0 &= x_0 - x_{00} - \frac{\varrho_{00}'}{2h}(1 - e^{-2ht}). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Für die Geschwindigkeiten kann man zur Grenze $t \to \infty$ übergehen, man gewinnt wieder das Maxwellsche Gesetz. Für die Verschiebungen hat der Grenzübergang keinen Sinn.

Zum Schluss muss ich meinen tiefsten Dank Prof. G. Krutkow aussprechen, dessen Ratschläge mir von grossem Werte waren.

Physikalisches Forschungsinstitut
der Leningrader Universität.

Eingegangen
d. 21. I. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] C. R. Acad. Sci. URSS (1934), S. 216; (1935), S. 601. [2] Bull. de l'Acad. d. Sci. de l'URSS (1935), S. 615.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

CHEMIE

SPALTUNG UND ISOMERISATION VON OLEFINEN, DIE EIN TERTIÄRES RADIKAL AUFWEISEN

Von I. N. NAZAROV

(Vorgelegt von A. E. Favorsky, Mitglied der Akademie, d. 16. X. 1935)

In der vorigen Arbeit (1) zeigten wir, dass das Di-tert.-butyläthylen sich beim Erhitzen mit 1-Bromnaphthalinsulfonsäure auf 85° in Isobutylen und ein Gemisch aus Tetramethyläthylen (ca. 70%), asymmetrischem Methylisopropyläthylen und tertiärem Butyläthylen glatt spaltet. In der nämlichen Arbeit gelangten wir zum Schluss, dass diese Spaltung und Isomerisation auf eine Isomerisation des Radikals zurückgeführt werden müsse.

Wir haben nun das Studium dieses Prozesses an Äthylenen fortgesetzt, die durch Dehydratierung folgender tertiärer Alkohole gewonnen wurden: Methylisopropyl-tert.-Buthylcarbinol, Äthylisopropyl-tert.- Butylcarbinol, Methylpropyl-tert.-Butylcarbinol, Diäthyl-tert.- Butylcarbinol, Methyläthyl-tert.-Butylcarbinol und Dimethyl-tert.-Butylcarbinol.

Methylisopropyl-tert.-Butylcarbinol wurde neuerdings von Whitmore und Laughlin (2) mittels β-Naphthalinsulfonsäure und Jod dehydratisiert. Durch Ozonierung der erhaltenen Olefine gelang es den Verfassern nachzuweisen, dass jene vorwiegend aus asymmetrischem Isopropyl- tert.- Butyläthylen bestehen. Die Verfasser konnten keine Spaltung desselben während der Dehydratsierung feststellen. Wird jedoch dieses Äthylen, wie auch das ursprüngliche Carbinol, mit 1-Bromnaphthalinsulfonsäure (4) erhitzt, so spalten sie sich glatt bei 130° in Isobutylen und Trimethyläthylen:

$$(CH_3)_3C-\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{CH_2}{\overset{\|}{C}}-CH(CH_3)_2 \rightarrow (CH_3)_2C=CH_2 + CH_3.CH=C(CH_3)_2.$$

Entsprechend dem früher vorgeschlagenen Schema muss sich das Isopropyl-vinylradikal wie folgt isomerisieren:

$$CH_2=\dot{C}-CH(CH_3)_2 \rightarrow CH_2=CH-\dot{C}(CH_3)_2 \rightarrow \dot{C}H_2-CH=C(CH_3)_2.$$

Durch Hydrierung des letzten Radikals (auf Kosten des tert- Butyls) würde man Trimethyläthylen erhalten; durch Hydrierung des ersten und zweiten Radikals dagegen müsste man Isopropyläthylen bekommen, doch liess sich letzteres nicht feststellen. Es wäre bei dieser Gelegenheit zu erwähnen,

dass das Isopropyläthylen sich, nach Ipatiew(3), glatt zu Trimethyläthylen isomerisiert, wenn es bis zu 500° erhitzt wird:

$$CH_2 = CH - CH(CH_3)_2 \rightarrow CH_3CH = C(CH_3)_2.$$

Auch hier scheint sich intermediär das Isopropylvinylradikal zu bilden, das sich weiterhin nach obigem Schema isomerisiert.

Äthylisopropyl-tert.-Butylcarbinol ist zum erstenmal hergestellt worden; mittels Jod dehydratisiert, liefert es ein bei 153—158° siedendes Olefin, welches als 1-Methyl-2-Isopropyl-2-tert.-Butyläthylen anzusprechen sein darf, wenn man von der Annahme ausgeht, dass die Dehydratation analog dem Methylisopropyl-tert.-Butylcarbinol verläuft (Wasser-Abspaltung auf Kosten des Hydroxyls und eines Wasserstoff-Atoms der Methylgruppe). Wird dieses Olefin mit 1-Bromnaphthalin-sulfonsäure-(4) erhitzt, so spaltet es sich bei 125° in Isobutylen und ein Gemisch niederer, anscheinend aus 1-Äthyl-2,2-Dimethyläthylen und 1-Methyl-2-Isopropyläthylen bestehender Olefine:

$$(CH_3)_3C - \overset{CH_3}{\overset{|}{\underset{\|}{C}}}H - CH(CH_3)_2 \rightarrow (CH_3)_2C = CH_2 + CH_3CH = CH - CH(CH_3)_2 + C_2H_5CH - C(CH_3)_2.$$

Man kann sich ihre Entstehung auf Grund folgenden Gleichgewichtes vorstellen:

$$CH_3CH - C(CH_3)_2 - CH(CH_3)_2 \rightleftarrows CH_3CH - CH - C(CH_3)_2 \rightleftarrows CH_3CH - CH = C(CH_3)_2.$$

Die Ergebnisse der Dehydratation (mittels Jod) der übrigen Carbinole, sowie auch das Verhalten der entstandenen Olefine zur Destillation mit 1-Bromnaphthalinsulfonsäure-(4) sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Carbinol	Olefin	Verhalten des Olefins zu 1-Bromnaphthalin-sulfonsäure (4)
1. $(CH_3)_3C\ C(CH_3)\ (OH)CH_2C_2H_5$ 170—172°; 1.4536; 0.8506	$(CH_3)_3C\ C(CH_3) = CHC_2H_5$ 130—132°; 1.4312; 0.7493	Keine Spaltung bis 170°
2. $(CH_3)_3C\ C(OH)\ (C_2H_5)_2$ 172—175°; 1.4438; 0.8491	$(CH_3)_3C\ C(C_2H_5) = CHCH_3$ 121—132°; 1.4390; 0.7533	Keine Spaltung bis 160°
3. $(CH_3)_3C\ C(CH_3)\ (OH)C_2H_5$	$(CH_3)_3C\ C(CH_3) = CHCH_3$ 108—113°; 1.4277; 0.7473	Keine Spaltung bis 160°
4. $(CH_3)_3C\ C(OH)\ (CH_3)_2$	$(CH_3)_3C\ C(CH_3) = CH_2$ 77—79°,5; 1.4023; 0.7075	Keine Spaltung bis 105°

Die Carbinole 1 und 2 sind zum erstenmal synthesiert worden. Die Zahlen geben den Siedepunkt, den Brechungskoeffizienten n_D^{15} und das spezifische Gewicht D_4^{15} entsprechend an. Das Carbinol 3 ist von Whitmore und Laughlin (2), das Carbinol 4 von Favorsky und Opel (4) dehydratisiert worden.

BESCHREIBUNG DER VERSUCHE

Pentamethylazeton wurde durch zweifaches Methylieren von Äthylisopropylketon in ätherischer Lösung mittels Natriumamid und Methyljodid dargestellt (Sdp. 133—136°).

Methylisopropyl-tert.-Butylcarbinol wurde aus Pentamethylazeton und Methylmagnesiumbromid gewonnen (Ausbeute 71%), Sdp. 172—176°. Stark nach Kampfer riechende Flüssigkeit, die schon bei Zimmertemperatur (ca. 15°) zu kristallisieren beginnt; n_D^{17} =1.4495; D_4^{15}=0.8622. Ermittelt: C—74.64, H—14.17%; berechnet als $C_9H_{20}O$: C—75.00, H—13.88%.

Bei der Destillation mit Spuren von Jod liefert dieses Carbinol ein bei 122—123° siedendes Olefin; n_D^{17}=1.4260; D_4^{13}=0.7545.

Spaltung und Isomerisation des asymmetrischen tert.-Butyl-Isopropyläthylens. 23 g Kohlenwasserstoff (Sdp. 122—133°) wurden mit 1 g 1-Bromnaphthalinsulfonsäure-(4) aus einem Wood-Metall-Bade destilliert. Als die Temperatur des Metalls bis auf 130° gestiegen war, stellte sich Gasentwickelung ein; gleichzeitig gingen Kohlenwasserstoffe über, deren Siedepunkt 32—33° betrug. Gegen Ende des Versuches stieg die Temperatur bis auf 180°. Man erhielt 1.5 l Isobutylen, 10 g Kohlenwasserstoffe und einen Rückstand (5 g), der bei 125—240° und noch höher überging. Mit konz. Bromwasserstoffsäure lieferte das Isobutylen 2 g tert.-Butylbromid (Sdp. 72—74°).

Durch Destillation wurden die Kohlenwasserstoffe in zwei Fraktionen zerlegt (die Vorlage wurde bei dieser wie auch bei analogen anderen Destillationen mit einer Kältemischung aus Eis und Salz abgekühlt, um einen Verlust der Substanz zu vermeiden):

1. 22—37°—4.3 g—Lösung von Isobutylen in Trimethyläthylen;
2. 37—40°—4 g; n_D^{21}=1.3890; D_4^{19}=0.6634—Trimethyläthylen.

Die bei 22—37° siedende Fraktion lieferte mit konz. Bromwasserstoffsäure 7.5 g eines bei 88—108° siedenden Bromids, das ein Gemisch von tert.-Butyl- und tert.-Amylbromid darstellte (letzteres siedet bei 108°). Isopropyläthylen (Sdp. 20°.7) war in dieser Fraktion nicht zugegen, denn mit konz. Bromwasserstoffsäure liefert es ein bei 116° siedendes Bromid (5).

Trimethyläthylen (Sdp. 37—40°) wurde durch das bei 71—73° schmelzende Nitrosochlorid charakterisiert (aus wässrigem Alkohol).

Beim Aufbewahren während 24 Stunden im Vakuum-Exsikkator über konz. Schwefelsäure isomerisierten sich die Nitrosochloridkristalle zu Chlorketoxym, das einen scharfen tränenerzeugenden Geruch besitzt und bei 45—48° schmilzt (6) (aus abs. Äther). Mit HBr wurde aus diesem Trimethyläthylen das bei 105—108° siedende tert.-Amylbromid gewonnen. Beim Dehydratieren des ursprünglichen Methylisopropyl-tert.-Butylcarbinols mit 1-Bromnaphthalinsulfonsäure-(4) werden analoge Resultate erzielt.

Bei einem Versuch wurden aus 10 g Carbinol 3 g Trimethyläthylen (Sdp. 30—40°) gewonnen.

Äthylisopropyl-tert.-butylcarbinol wurde ebenfalls aus Pentamethylazeton und Äthylmagnesiumbromid erhalten (Ausbeute nur 7%). Die Reaktion vollzieht sich hauptsächlich im Sinne der Reduktion von Keton zu Alkohol unter Äthylenentwicklung. Das Carbinol stellt eine nach Kampfer stark riechende Flüssigkeit dar, Sdp. 188—191°; n_D^{21}=1.4481; D_4^{19}=0.8628. Ermittelt: C—76.08%, H—13.90%; berechnet als $C_{10}H_{22}O$; C—75.95%; H—13.92%.

Bei der Destillation mit Jodspuren liefert es ein bei 153—158° siedendes Olefin; n_D^{20}=1.4370; D_4^{20}=0.7791. Bei der Destillation von 10 g dieses

Olefins mit 0.5 g 1-Bromnaphthalinsulfonsäure-(4) wurden etwa 300 cm³ Isobutylen, 5 g Kohlenwasserstoffe und 2 g Rückstand gewonnen.

Die Spaltung setzt bei 125° ein. Bei der Destillation trennten sich die Kohlenwasserstoffe in zwei Fraktionen.

1. 38—57°—2 g;
2. 57—68°—2.5 g; n_D^{25}=1.3988; D_4^{19}=0.6859.

1-Methyl-2-Isopropyläthylen und 1-Äthyl-2-2-Dimethyläthylen wiesen folgende Konstanten auf:

1-Methyl-2-Isopropyläthylen, Sdp. 57—58°; n_4^{20}=1.3883; D_1^{20}=0.6706;
1-Äthyl-2-2-Dimethyläthylen, Sdp. 65—67°; D_4^{20}=0.687.

Die erste, bei 38—57° siedende Fraktion besteht anscheinend ebenfalls aus diesen Äthylenen, denen Isobutylen beigemengt ist. Infolge der äusserst geringen Mengen war es jedoch nicht möglich, sie in reinem Zustande zu isolieren und ausser durch die Konstantenbestimmung noch weiter zu charakterisieren. Methylpropyl-, Diäthyl- und Methyläthyl-tert.- Butylcarbinol wurden mit einer Ausbeute von 6—10% aus tert.- Butylmagnesiumchlorid und den entsprechenden Ketonen hergestellt. Diäthyl-tert.-butylcarbinol wurde auch aus Äthyl-tert.-Butylketon und Äthylmagnesium bromid mit einer Ausbeute von etwa 5% hergestellt.

Institut f. organische Chemie.
Akademie d. Wissenschaften d. UdSSR.
Moskau

Eingegangen
d. 16. X. 1935

ZITIERTE LITERATUR

[1] J. N. Nazarov, s. die vorhergehende Mitteilung in dieser Zeitschrift. [2] Whitmore a. Laughlin, J. Am. Ch. Soc. **55**, 3732 (1933)*. [3] Ипатьев, B., **36**, 2004. [4] Фаворский и Оппель, Ж., 50, 67 (1920). [5] Michael u. Leupold, A., **379**, 296. [6] Schmidt, B., **35**, 3727 (1902).

* Die weit abstehenden Grenzen der Siedetemperatur der Kohlenwasserstoffe sind auf eine Beimengung des dem letzteren isomeren 2, 3, 3, 4-tetramethylpenten-1 zurückzuführen.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

PETROGRAPHY

A STUDY OF THE VISCOSITY OF MOLTEN LAVAS FROM MOUNT ALAGHEZ

By M. P. VOLAROVIČ, D. M. TOLSTOJ and L. I. KORČEMKIN

(Communicated by F. J. Loevinson-Lessing, Member of the Academy, 23. I. 1936)

Studies of the viscosity of molten rocks are neither numerous nor systematic. In their previous works, the writers (1) had measured the influence of temperature on the viscosity of a number of Olonetz diabases, of several basalts as well as of teschenite, andesite and obsidian. These rocks differ from each other to a considerable extent in regard to their content in silicic acid (48—73 %), but they come from different petrographic provinces of the USSR and are not genetically connected with each other. The samples of basalts studied by Koichi Kani (3) also come from different petrographic districts of Japan. Besides the works mentioned above, there are also earlier investigations of the viscosity of synthetic diopside due to Doelter and Sirk (3) and some recent viscosity measurements of albite and orthoclase made by Bowen (4). We therefore thought it advisable to make measurements of the viscosity of a group of igneous rocks genetically connected with each other. It appeared both interesting and convenient to use for the purpose the lava samples from Mount Alaghez, a volcano thoroughly studied by P. I. Lebedev (5), who established a well-defined sequence in the ejection of lavas of varying acidity, from basalts down to liparites. The samples of lavas for the study of viscosity were kindly placed at our disposal by P. I. Lebedev, for which we are much indebted to him.

The following rocks were selected for investigation: basalt (Bashkeg) No 404, andesito-basalt (Agdjaskala) No 515, andesite (Ampert river) No 83, dacite (Ampur Daga) No 221 and alkaline dacite (Ampur-Daga) No 226.

The chemical analyses of the rocks and their coefficients of acidity α, determined after the method of Acad. F. J. Loevinson-Lessing, have been borrowed from the work of P. I. Lebedev (5).

The viscosity measurement were made with a rotating cylinder, the melt being placed between two platinum cylinders after a method repeatedly described in previous works (6). The viscosity values η and the coefficients of acidity α are given in Tables 2 to 6, the first column showing the temperature, the second—the absolute value of viscosity η, and the third—the logarithm of viscosity.

Fig. 1 shows graphically the influence of temperature on the viscosities of these rocks.

Table 1

Chemical Analyses of a Number of Rocks

	Basalt No 404	Andesito-Basalt No 515	Andesite No 83	Dacite No 221	Alkaline Dacite No 226
SiO_2	50.92	55.15	59.44	63.85	66.30
TiO_2	1.60	0.88	0.91	0.87	1.09
Al_2O	17.81	17.22	16.02	16.58	11.88
Fe_2O_3	3.96	1.64	1.68	3.24	2.83
RO: FeO	5.12	4.85	4.96	1.65	4.20
RO: MnO	0.11	0.12	0.09	0.08	0.14
RO: MgO	6.10	6.09	3.47	1.52	1.10
RO: CaO	8.43	7.91	5.66	3.16	2.70
R_2O: Na_2O	3.55	3.56	4.08	4.35	6.19
R_2O: K_2O	1.88	1.74	2.28	4.29	3.73
P_2O_5	—	—	—	—	0.23
H_2O —110°	0.19	—	0.65	0.13	—
H_2O +110°	0.49	0.94	0.72	0.46	—
Losses in annealing	—	—	—	—	0.10
Σ	100.16	100.10	99.96	100.18	100.49

Table 2

Basalt No 404

$\alpha = 1.61$

$t°$	η	$\lg\eta$
1 400	353	2.556
1 340	650	2.811
1 320	820	2.912
1 280	1 340	3.124
1 220	2 960	3.478
1 160	6 820	3.832
1 160	13 600	4.132

Table 3

Andesito-Basalt No 515

$\alpha = 1.88$

$t°$	η	$\lg\eta$
1 400	1 980	3.297
1 300	5 650	3.751
1 200	20 200	4.306
1 160	48 000	4.682
1 140	69 700	4.843
1 120	113 000	5.053
1 100	168 000	5.225
1 050	706 000	5.849
1 050	1 410 000	6.149
1 050	4 010 000	6.602

Table 4

Andesite No 83

$\alpha = 2.33$

$t°$	η	$\lg\eta$
1 400	7 850	3.895
1 350	14 400	4.158
1 300	30 000	4.477
1 250	49 000	4.690
1 200	105 000	5.022
1 170	157 000	5.196
1 140	271 000	5.433

Table 5

Dacite No 221

$\alpha = 2.72$

$t°$	η	$\lg\eta$
1 400	15 200	4.182
1 300	53 000	4.724
1 200	222 000	5.346
1 100	1 690 000	6.228

Table 6

Alkaline Dacite N 226

$\alpha = 3.26$

$t°$	η	$\lg\eta$
1 400	20 500	4.312
1 300	74 000	4.870
1 200	270 000	5.432
1 100	2 400 000	6.380

In the first place it is to be mentioned that rocks having a low viscosity begin to crystallize during measurement (basalt at 1160°, andesito-basalt at 1050°). Accordingly, their viscosity gradually increased at a stable temperature (cf. Tables 2 and 3). In Fig. 1, this increase of viscosity is marked with dotted lines. Identical phenomena had been observed by the writers in their previous works, when studying the viscosity of basalts and diabases (1).

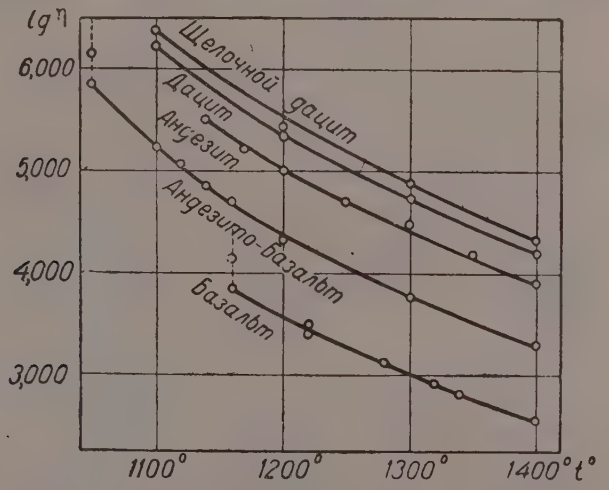

Fig. 1.

Щелочной дацит—Alkaline dacite. Дацит-андезит—Dacite-andesite. Андезито-базальт—Andesite-bazalt. Базальт—Basalt.

The highly viscous melts of andesite and dacite failed to show any crystallization in our experiments.

Furthermore, an examination of Fig. 1 shows that the viscosity of these rocks invariably increases with the increase of their acidity. The respective positions of the curves for basalt, andesito-basalt, andesite and dacite do not give rise to any question (1), but one would have thought that alkaline dacite might have proved less viscous than dacite No 221, since, in addition to a higher content of $RO+R_2O$, it contains 4% less of alumina, whose influence on η is the same as that of SiO_2; still, a surplus of 2.5% in the content of silicic acid proved decisive, and the viscosity of alkaline dacite No 226 appeared, in spite of all, to be greater than that of dacite No 221.

In view of so exceptional an influence of silicic acid on the viscosity, of rock melts, it was of interest to represent graphically the connection between their acidity coefficients and the absolute viscosity of the melts.

Fig. 2 illustrates this connection, the values of the acidity coefficients being plotted on the axis of abscissae, and the values of viscosity η_0 in poises, for temperatures of 1160, 1200, and 1300, on the axis of ordinates.

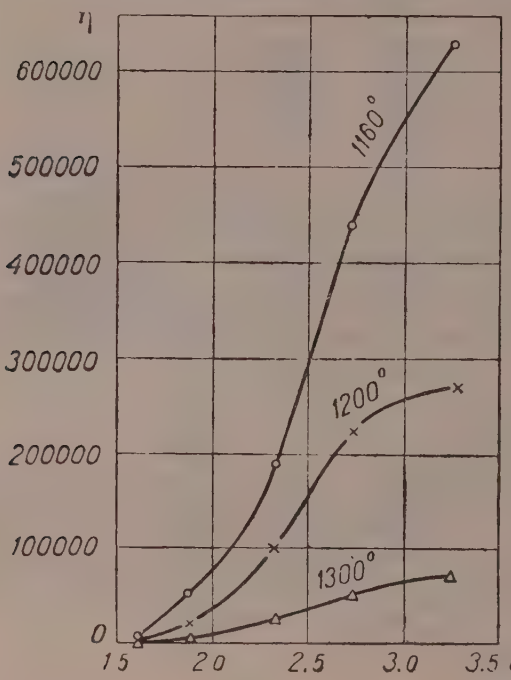

Fig. 2.

It may be seen that all the isotherms follow the same course, the viscosity of the melts invariably increasing as the acidity coefficient rises. The existence of a point of inflection in the isotherms is due to the fact that, owing to the influence of the alumina, the viscosity of alkaline dacite appears ultimately to be lower than this might have been expected if the absolute value of the acidity coefficient alone were taken into consideration, no allowance being made for the different influence of the viscosity of different oxides, which influence can be shown graphically by plotting a variation diagram.

We also tried to measure the viscosity of liparite No 1463 taken from the same group of Mount Alaghez lavas. Owing, however, to its very high viscosity and low fusibility, we found it impossible to do so with our apparatus. All we could ascertain was that, at a temperature of about 1450°, it only begins to melt, which confirms the considerations set forth above, since its acidity coefficient is higher ($\alpha = 4.66$) than that of dacites.

All-Union Institute
of Mineral Raw Material. Moscow.

Received
23. I. 1936.

REFERENCES

[1] М. П. Воларович, Журн. Физич. Химии, **4**, 807 (1933); Comptes Rendus (Doklady) Acad. Sci. URSS, **9**, 35 (1934); Труды Института Прикладной Минералогии, **66** (1934); Kolloid. ZS., **71**, 159 (1935); C. R. Acad. Sci., Paris, 202, 78 (1936). М. П. Воларович и Д. М. Толстой—Минеральное Сырье, **5**, 25 (1935). [2] Koichi-Kani, Proc. Japan Acad. Sci., **10**, 79 (1924). [3] C. Doelter u. H. Sirk, Sitz.-Ber. Wien. Acad., **120**, 658 (1911); Chem. ZS., **36**, 36 (1912). [4] N. L. Bowen, Paper 849 from Geophys. Labor. Carnegie Inst. (1935). [5] П. И. Лебедев, Труды СОПС'а Академии Наук СССР, Зак. серия, т. **1**, вып. 3 (1931). [6] М. П. Воларович, Журнал Приклад. Физики, **5**, 186 (1928); **6**, 68 (1929); Journ. Soc. Glass. Techn., **18**, 201 (1934); M. P. Wolarowitsch et B. Derjaguin, Journ. de Chim. phys., **32**, 142 (1935). M. P. Volarovič and D. M. Tolstoj, Bull. Acad. Sci. URSS, **9**, 897 (1930). C. R. Acad. Sci. URSS, **11**, 269 (1932); Journ. Soc. Glass Techn., **18**, 209 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 8 (85)

GENETICS

FREQUENCY OF OCCURRENCE OF SPONTANEOUS LETHALS IN MATURE AND IMMATURE GERM CELLS OF *DROSOPHILA MELANOGASTER*

By M. NEUHAUS

(Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 11. II. 1936)

Bridges (2), Muller (5) and others have shown that mutations arise in different stages of the development of the organism. The problem of the speed with which mutations occur in different stages of ontogenesis still remains funsolved. It is evident from the work of Bridges that the majority of apparent sex-linked mutations occur at or near the maturation stage and that a few occur in the gonial cells some time prior to maturation. Thus of 30 dominant mutations $^3/_4$ were single heterozygotes.

Muller, in a more extensive investigation, observed cases of origination of mutations (locus W) in practically all stages and particularly before the separation of the germinal tract from the soma as well as after separation (in this case the mutation involved only the soma). As regards the frequency of mutation in different stages of gametogenesis Muller believes that even for the same chromatin susceptibility there should still be a noticeable rise in mutations at or near the stages of maturation. This is explained, in the main, by the fact that germ cells live much longer in later stages. He concludes that probaly more mutations occur by old animals or by species having a longer life cycle or having a greater number of cell divisions in the germ cycle.

Recent roentgenological research has again opened up the question of chromatin susceptibility. A number of investigators (Harris, 1929; Timofeev-Ressovsky, 1930) have shown that sex-linked lethals under influence of X-rays increase more frequently in mature than in immature germ cells. Muller [see Harris(3)] proposes two hypotheses to explain this: 1) germinal selection, *i. e.*, death or reduced division rate of immature germ cells thanks to the presence of lethals in them, the spermatozoids do not die because their genes do not function; 2) greater susceptibility of chromatin in mature as compared with immature cells.

The first hypothesis is hardly tenable, at least not as the sole explanation. Evidence against it has been found in the fact [Muller (6) and others since then] that sex-linked mutations occur oftener in offspring of treated

spermatozoa than in those of treated (diploid) female germ cells of immature stages. Arguing against it also are the reports of Shapiro (9), Shapiro and Neuhaus (10), Moore (4), and Neuhaus (7). They have shown that translocation, autosomal recessive lethals, and visible sex-linked mutations occur more frequently in mature cells. It is thus evident that the role of germinal selection is not sufficient to account for the results.

It is in connection with the second hypothesis that the present investigation, on the frequency of spontaneous mutations, was begun.

Methods

The most significant criteria for the occurrence of mutations in early or later stages of development is the presence or the absence of groups or «bundles» of mutations. This means that if mutations occurred in one out of ten primordial cells, then 10% of *X*-bearing sperms of this male will carry this mutation. This method has its drawbacks, the chief being that an analysis must be made of the large number of daughter cells in each male. Moreover, if lethals occur in the stages when the germinal tract has not yet been separated from the soma, then such individuals, no doubt, die.

Young $yw^a f$ males were crossed individually with virgin females $\frac{ClB}{y\,v\,fB} \frac{cy}{+}$ *. In the F_1 of each not less than 35—40 gray $\overline{B_1 Cy}$ daughters were used, the latter being crossed with their brothers. In F_2 we observed sex-linked lethals and translocations between first and second chromosomes. From the maleless cultures F_2 yellow females were selected to localize these lethals. If from one male from generation P_1 there were derived two or three maleless cultures, then part of the yB_1 females were crossed with yw males carrying a deleted *X*-chromosome with normal genes in the extreme left end. This was done so that if lethals were localized in the extreme left end of the *X*-chromosome then males carrying this lethal and the deleted *X*-chromosome, would remain alive. In this way it was easy to determine the allelomorphism of this lethal.

Results

In the table are summarized the results of all the 14 series.

In the full series about 250 males were analyzed. In all, 6 638 *X*-chromosomes were examined. Of these 25 or $0.376 \pm 0.075\%$ carried lethals. Of the 25 lethals, 5 undoubtedly occurred in one of the early stages. This is evident from the following: 1) in view of the low frequency of spontaneous lethals, the probability of an accidental occurrence of three or even of two lethals in one male is very small; 2) the crossing-over loci are very close to one another. The lethals were, however, not covered by our deleted *X*-chromosome and thus a precise determination of allelomorphism was excluded.

$0.075\% \pm 0.033\%$ of the lethals occurred at the earlier stages; $0.301\% \pm \pm 0.067\%$ at the later stages, the difference (0.226 ± 0.075) turns out to be 3.01 times greater than the standard error.

It may be pointed out that in 6 638 pairs of chromosomes there were no spontaneous translocations involved in the first and the second chromosomes.

---

* This gene *cy* was introduced in order to observe the frequency of spon taneous trans l ocations between the first and second chromosomes.

Results of all the 14 series

Series number	Number of analyzed *X*-chromosomes	Designations of males that carried lethals	Number of analyzed chromosomes from lethal-bearing males	Number of lethals from one male	Probable locus of the lethals
I	320	№ 2	20	3	5, 4, 4
II	500	№ 11, № 25	26, 42	1,1	0, 33
III	281	—	—	—	—
IV	290	№ 32	20	1	0
V	304	№ 1	24	1	53
VI	395	№ 6	25	1	26
VII	642	№ 16, № 29, № 5	22, 19, 40	2, 1, 1	18, 18, 0, 33
VIII	313	№ 4	44	1	0
IX	907	№ 38, № 17, № 24	18, 28, 33	1, 1, 1	0, 51, 17
X	570	№ 48, № 33	25, 30	1,1	6, 40
XI	541	№ 7, № 26	32, 29	1,1	13, 10
XII	675	№ 11, № 23	34, 30	1,1	8, 30
XIII	578	№ 18, № 34	70, 35	1,1	36, 8
XIV	322	№ 11	40	1	13
	6 638	—	—	25	—

Discussion

The difference is 3.01 times larger than its error, so that from the above we may conclude that spontaneous mutability of the genes are different in mature and immature germ cells and that mutability of the genes is several times greater in mature than in immature cells. The difference in mutability of the genes may be explained by either one of two hypotheses.

The first hypothesis, suggested by Muller in 1920, may be formulated in the following way: the factor or factors that influence the process of spontaneous mutation should cause mutation more frequently in mature than in immature germ cells, since these factors influence the genes of mature cells much longer than the genes of immature cells.

The second hypothesis, formulated by Muller [see Harris (3)] on the basis of his work with X-rays, is that genes in mature germ cells are more labile than those in immature cells.

Summary

1. The present investigation was carried on to determine whether spontaneous mutations occur with equal frequency in the different stages in the development of the gonads. 14 experiments were conducted to find sex-linked lethals.

2. 6 638 chromosomes were analyzed. 25 sex-linked lethals were found. Five of these apparently occurred in immature germ cells ($0.075\% \pm 0.033\%$) and 20 of the others, in mature cells ($0.301\% \pm 0.067\%$). The difference was 3.01 greater than its standard error.

3. Different hypotheses to explain this difference are discussed.

Medico-Genetic Institute.
Moscow.

Received
11. II. 1936

REFERENCES

[1] И. И. Агол, Журн. экспер. биол., **VI** (1930). [2] C. B. Bridges, Proc. of the Soc. for Exp. Biol. and Med., **XVII** (1919). [3] B. B. Harris, Journ. of Here., **20** (1929). [4] W. G. Moore, Genetics, **19** (1934). [5] H. J. Muller, Journ. of Exper. Zool., **31** (1920). [6] H. J. Muller, Amer. Nat., **64** (1930). [7] М. Е. Нейгауз, Биол. журн., **III** (1934). [8] Н. В. Тимофеев-Ресовский, Журн. экспер. биол., **VI** (1930). [9] Н. И. Шапиро, Журн. эксп. биол. (1931). [10] Н. И. Шапиро и М. Е. Нейгауз, Биол. журн., **VI** (1933).